

## Теория и расчет цифровых фильтров с импульсными характеристиками конечной длины

Линейную стационарную систему, импульсная характеристика которой является последовательностью конечной длины, называют системой с конечной импульсной характеристикой (КИХ) или, что то же самое, КИХ-фильтром.

Хорошо известны три класса методов расчета КИХ фильтров с линейной фазой: методы взвешивания с помощью окна, методы частотной выборки, а также методы расчета оптимальных (по Чебышеву) фильтров.

### Метод взвешивания

Поскольку частотная характеристика любого цифрового фильтра  $H(e^{j\omega})$  является периодической функцией частоты, ее можно представить рядом Фурье:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (2.1)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Видно, что коэффициенты Фурье  $h(n)$  совпадают с коэффициентами импульсной характеристики цифрового фильтра. Использование соотношения (2.1) для проектирования КИХ фильтров связано с двумя трудностями. Во-первых, импульсная характеристика фильтра имеет бесконечную длину, поскольку суммирование осуществляется в бесконечных пределах. Во-вторых, фильтр физически нереализуем, т.к. импульсная характеристика начинается в  $-\infty$ .

Простое усечение ряда приводит к появлению выбросов и пульсаций определенного уровня до и после точки разрыва. Лучшие результаты дает метод проектирования КИХ фильтров, основанный на использовании весовой последовательности конечной длины  $w(n)$ , называемой окном, для модификации коэффициентов Фурье в формуле (2.1) с тем, чтобы управлять сходимостью ряда Фурье.

Сверху показана периодическая частотная характеристика  $H(e^{j\omega})$  и ее коэффициенты Фурье  $h(n)$ . Ниже показана весовая последовательность конечной длины  $w(n)$  и ее преобразование Фурье  $W(e^{j\omega})$ . Для большинства приемлемых окон функция  $W(e^{j\omega})$  имеет главный лепесток, содержащий

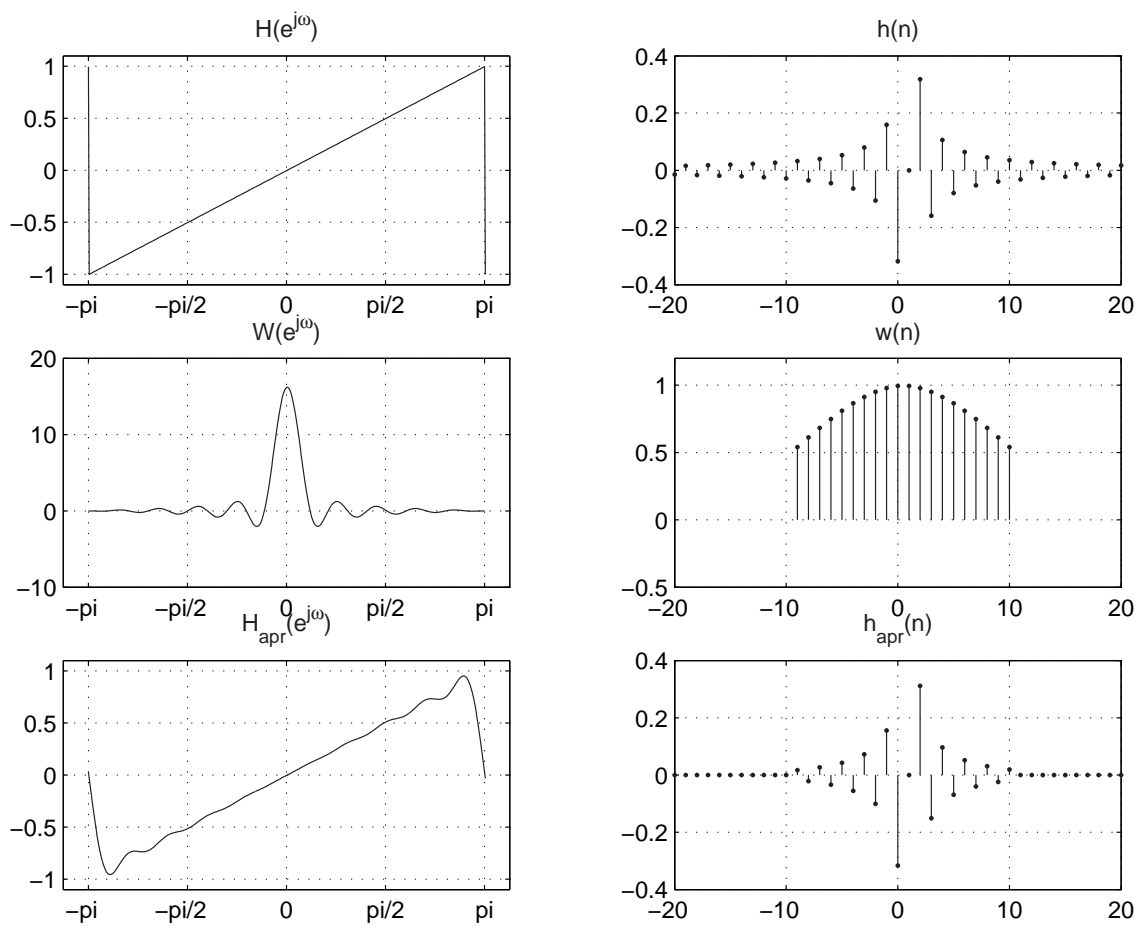


Рис. 1: Иллюстрация метода взвешивания

почти всю энергию окна, и боковые лепестки, которые обычно быстро затухают. Чтобы получить КИХ-аппроксимацию функции  $H(e^{j\omega})$  формируется последовательность  $\hat{h}(n) = h(n)w(n)$ , в точности равная 0 за пределами интервала  $-M \leq n \leq M$ . Третья пара графиков представляет последовательность  $\hat{h}(n)$  и ее преобразование Фурье  $\hat{H}(e^{j\omega})$ , равное, очевидно, круговой свертке функций  $H(e^{j\omega})$  и  $W(e^{j\omega})$ , поскольку  $\hat{h}(n) = h(n)w(n)$  является произведением  $h(n)$  и  $w(n)$ .

Физически реализуемая последовательность  $g(n)$  равна задержанной последовательности  $\hat{h}(n)$  и может быть использована в качестве искомой импульсной характеристики фильтра.

Было предложено много окон, аппроксимирующих заданные характеристики. Далее будут рассмотрены прямоугольное окно, обобщенное окно Хэмминга и окно Кайзера.

### Прямоугольное окно

$N$ -точечное прямоугольное окно, соответствующее простому усечению (без модификации ряда Фурье), описывается весовой функцией:

$$w_r = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{для остальных } n \end{cases} \quad (2.2)$$

Частотная характеристика прямоугольного окна описывается соотношением:

$$W_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega \frac{N-1}{2}} (1 - e^{-j\omega N})}{1 - e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \quad (2.3)$$

$$W_r(e^{j\omega}) = -\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

### Обобщенное окно Хэмминга

$$w_h(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(\frac{2\pi n}{N}), & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.4)$$

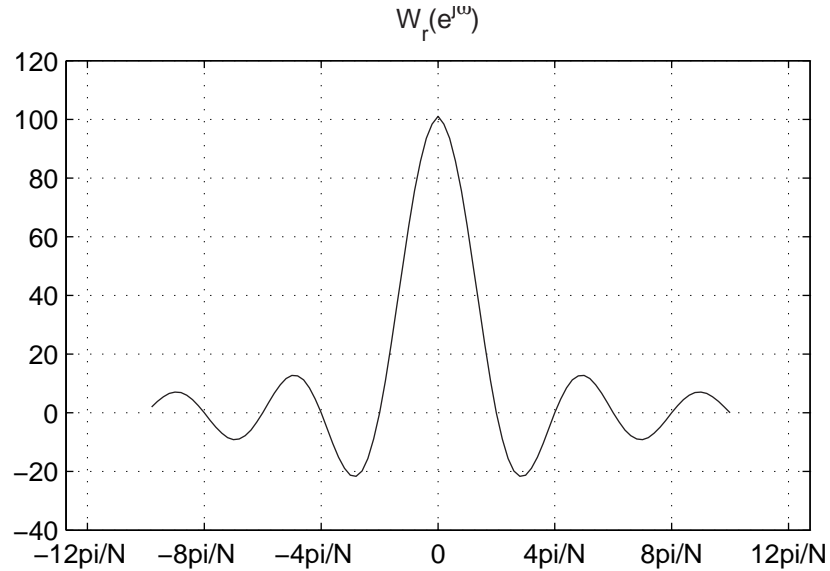


Рис. 2: Частотное представление прямоугольного окна.

причем  $\alpha$  лежит в пределах от 0 до 1. Случай  $\alpha = 0.54$  соответствует окну Ханна.

Частотную характеристику рассматриваемого окна легко получить, если учесть, что оно может быть представлено в виде произведения прямоугольного окна и окна, определяемого формулой (2.4), но для всех  $n$ .

$$w_h(n) = w_r(n)\left(\alpha + (1 - \alpha)\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right), \quad (2.5)$$

следовательно, частотная характеристика обобщенного окна Хэмминга равна круговой свертке частотной характеристики прямоугольного окна  $W_r(e^{j\omega})$  с последовательностью импульсов и может быть записано в виде:

$$W_h(e^{j\omega}) = W_r(e^{j\omega}) * \left(\alpha u_0(\omega) + \frac{1 - \alpha}{2} u_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + \frac{1 - \alpha}{2} u_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right), \quad (2.6)$$

откуда

$$W_h(e^{j\omega}) = \alpha W_r(e^{j\omega}) + \frac{1 - \alpha}{2} W_r\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)}\right) + \frac{1 - \alpha}{2} W_r\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)}\right) \quad (2.7)$$

Ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем для прямоугольного окна. Однако уровень боковых лепестков в случае окна Хэмминга значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна.

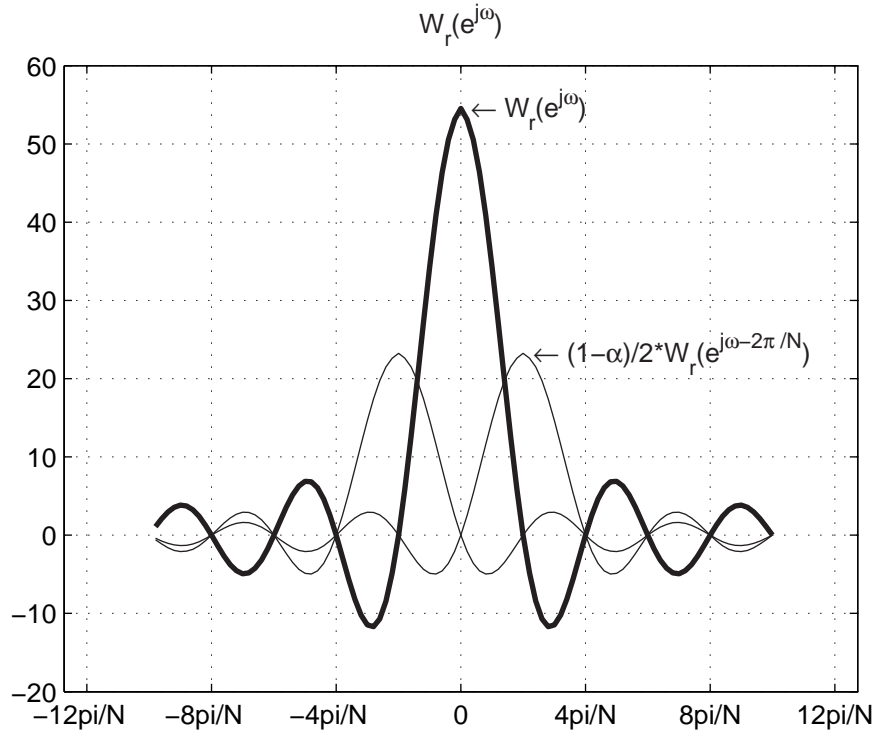


Рис. 3: Частотное представление обобщенного окна Хэмминга.

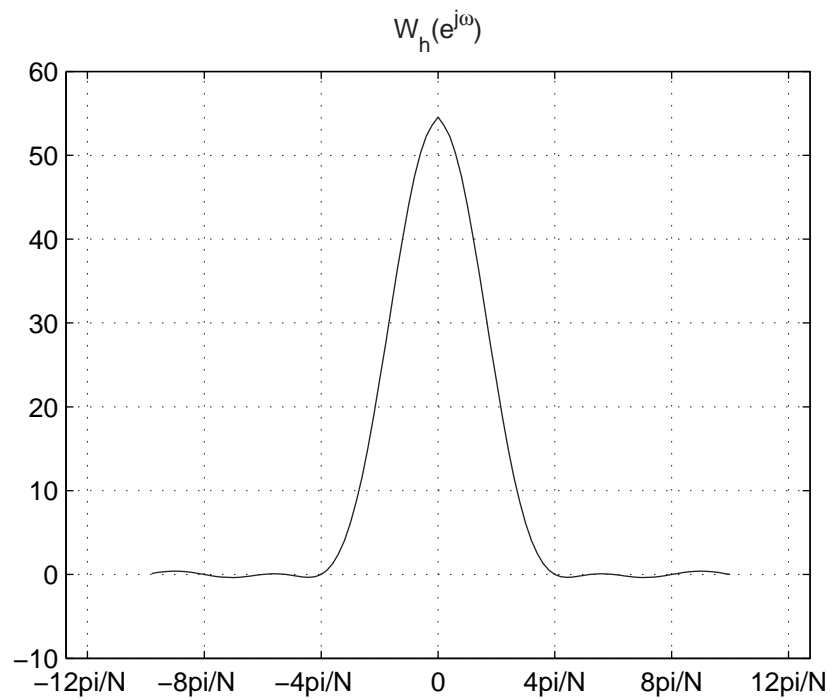


Рис. 4: Частотное представление обобщенного окна Хэмминга (сумма составляющих).

На рисунке 4 хорошо видно, каким образом при использовании окна Хэмминга достигается подавление боковых лепестков при одновременном расширении главного лепестка: боковые лепестки функции  $W_r(e^{j(\omega \pm \frac{2\pi}{N})})$  находятся в противофазе с боковыми лепестками  $W_r(e^{j\omega})$ , поэтому общий уровень боковых лепестков значительно уменьшается. В то же время пропорционально увеличивается ширина главного лепестка частотной характеристики.

При расчете фильтра нижних частот расширение главного лепестка соответствует расширению переходной полосы между полосами пропускания и не пропускания, тогда как уменьшение уровня боковых лепестков соответствует меньшим пульсациям в полосе пропускания.

### Окно Кайзера

Задача расчета хороших окон сводится к математической задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразования Фурье которых наилучшим образом аппроксимируют функции, ограниченные по частоте, т.е. имеют минимальную энергию за пределами заданного диапазона частот. При решении этой задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введен класс так называемых вытянутых сфероидальных волновых функций. Эти функции имеют достаточно сложный вид. Поэтому Кайзер в качестве наилучшего окна предложил относительно простую аппроксимацию этих функций. Эта аппроксимация, названная окном Кайзера, записывается в виде:

$$w_k(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (\frac{2n}{N-1})^2})}{I_0(\beta)} \quad (2.8)$$

$\beta$  - константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка (или долей общей энергии в главном лепестке) частотной характеристики окна, а  $I_0(x)$ -функция Бесселя нулевого порядка.

Частотная характеристика дискретного окна Кайзера в замкнутой форме не получена, но Кайзер показал, что для непрерывной функции окна частотная характеристика пропорциональна

$$\frac{\sin(\beta \sqrt{(\frac{\omega}{\omega_\beta})^2 - 1})}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_\beta})^2 - 1}} \quad (2.9)$$

где величина  $\omega_\beta$  приблизительно равна ширине главного лепестка частотной характеристики.

Окно Кайзера является по существу оптимальным окном в том смысле, что оно представляет последовательность конечной длины, которая имеет минимум энергии спектра за пределами некоторой заданной частоты. Еще одним оптимальным окном является окно Дольфа-Чебышева, обеспечивающее минимальную ширину главного лепестка частотной характеристики при фиксированном уровне боковых лепестков.

Однако ни одно из этих окон не позволяет получить оптимальную в минимаксном смысле аппроксимацию произвольной идеальной частотной характеристики, поскольку в действительности характеристика фильтра является результатом свертки частотных характеристик окна и идеального фильтра. Таким образом, несмотря на наличие оптимальных окон, оптимальных фильтров, которые рассчитывались бы с их помощью не существует.

## Второй метод проектирования - метод частотной выборки

КИХ фильтр может быть однозначно задан как коэффициентами импульсной характеристики  $h(n)$ , так и коэффициентами ДПФ импульсной характеристики  $H(k)$ .

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (2.10)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (2.11)$$

Кроме того, известно, что коэффициенты ДПФ КИХ последовательности, равные  $H(k)$ , можно рассматривать как значения z-преобразования импульсной характеристики фильтра, найденные в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности, т.е.

$$H(k) = H(z) \Big|_{z = e^{j \frac{2\pi}{N} k}} \quad (2.12)$$

Таким образом,  $z$ -преобразование импульсной характеристики КИХ-фильтра можно легко выразить через коэффициенты ДПФ его импульсной характеристики, если подставить (2.11) в выражение для  $z$ -преобразования:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] z^{-n} \quad (2.13)$$

Меняя порядок суммирования и суммируя по  $n$ , получим

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{1 - e^{j2\pi k} z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \quad (2.14)$$

Поскольку  $e^{j2\pi k} = 1$ , то соотношение принимает вид:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad (2.15)$$

что и является искомым результатом.

Из соотношения (2.15) следует, что для аппроксимации произвольной непрерывной частотной характеристики следует произвести ее дискретизацию по частоте в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности и найти непрерывную частотную характеристику интерполируя отсчеты частотной характеристики.

В этом случае ошибки аппроксимации на частотах взятия выборки будут в точности равны 0 и иметь конечную величину в промежуточных точках.

Для улучшения качества аппроксимации часть частотных отсчетов целесообразно сделать независимыми переменными. Значения этих независимых обычно рассчитывают методами оптимизации, таким образом, чтобы минимизировать некоторую простую функцию ошибки аппроксимации. В качестве независимых переменных можно выбрать например частотные отсчеты, расположенные в переходной полосе между двумя полосами, внутри которых частотная характеристика определена.

Чтобы понять, почему при такой методике оптимизации часто лишь несколько из  $N$  частотных отсчетов могут существенно уменьшить ошибку аппроксимации необходимо вычислить значения  $H(z)$  на единичной окружности.

Интерполяционная формула:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\frac{\pi k}{N}} \sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} \quad (2.16)$$



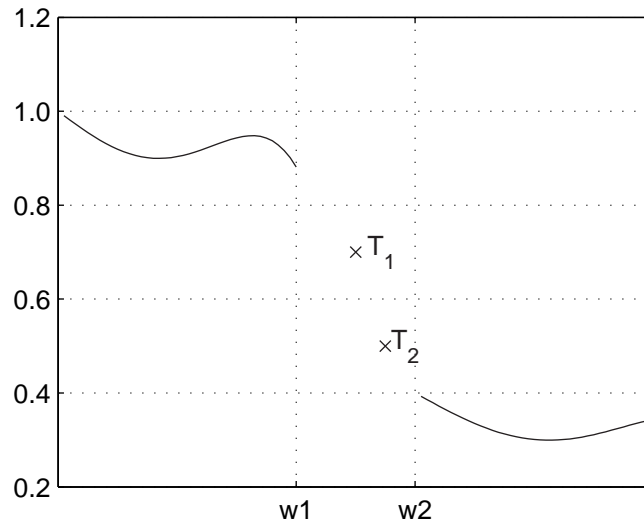


Рис. 5: 'Точки переходной области.'

Отсюда следует, что частотная характеристика фильтра является линейной комбинацией частотных интерполирующих функций вида:

$$S(\omega, k) = e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} = \pm e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin(N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}))}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} \quad (2.17)$$

со значениями частотных отсчетов  $H(k)$  в качестве коэффициентов. Таким образом, вклад каждого частотного отсчета в общую частотную характеристику пропорционален его значению  $H(k)$ , умноженному на функцию  $\sin(\frac{N\omega}{2})/\sin(\frac{\omega}{2})$ , смещенную по частоте на  $\frac{\pi k}{N}$ . Оказалось, что интерполирующие функции, связанные с частотными отсчетами из переходной полосы, обеспечивают хорошее подавление пульсаций в примыкающих частотных областях. Таким образом, оптимизация значений только тех незаданных частотных отсчетов, которые лежат в предварительно выбранных переходных полосах, можно получить фильтры с очень хорошими характеристиками.

### Решение задачи оптимизации

Чтобы найти оптимальные значения незаданных частотных отсчетов нужно составить и решить систему уравнений, математически описывающих задачу реализации.

на рисунке иллюстрируется типичный способ задания фильтра при расчете методом частотной выборки. Частотная характеристика фильтра зада-

на в полосах  $\omega < \omega_1$  и  $\omega > \omega_2$  и не задана в переходной полосе  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  между ними. Необходимо оптимизировать частотные отсчеты  $T_1$  и  $T_2$ .

Предположим, что  $H(e^{j\omega})$  можно выразить в виде:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{KM} H(k)S(\omega, k) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} H^*(e^{j\omega}), \quad (2.18)$$

где  $S(\omega, k)$  - результирующая частотная интерполирующая функция, а  $(KM + 1)$  равно числу частотных отсчетов, которые требуется определить.

Из формулы (2.18) следует, что

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{KM} H(k)S(\omega, k) \quad (2.19)$$

Ниже при составлении уравнений будет использована действительная функция  $H^*(e^{j\omega})$ , поскольку множитель с линейным уравнением фазы при проектировании фильтра можно не учитывать.

Для примера на рисунке Рис.5 функцию  $H^*(e^{j\omega})$  можно представить в более простой форме:

$$H^*(e^{j\omega}) = B(\omega) + T_1 A_1(\omega) + T_2 A_2(\omega) \quad (2.20)$$

Здесь  $B(\omega)$  учитывает вклад в  $H^*(e^{j\omega})$  всех заданных частотных отсчетов, а  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$  - вклады от двух незаданных частотных отсчетов с амплитудами  $T_1$  и  $T_2$ .

Чтобы найти эти незаданные частотные отсчеты, необходимо для частот в пределах полос 1 и 2 составить систему ограничивающих уравнений. Типичными ограничениями для такой системы уравнений могут быть следующие:

1.  $\left| H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega}) \right| \leq \varepsilon$ , для  $\omega$  в полосе 1.
2. Минимизируется максимум  $\left| H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega}) \right|$  для  $\omega$  в полосе 2 подбором  $T_1$  и  $T_2$ .

Здесь  $\omega$  - заданная погрешность. Другой способ задания ограничений заключается в следующем: минимизируется максимум  $\left| W(e^{j\omega}) \left[ H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega}) \right] \right|$  в полосах 1 и 2 подбором  $T_1$  и  $T_2$ . Здесь  $W(e^{j\omega})$  - известная весовая функция ошибки аппроксимации частотной характеристики.

Приведенные ограничения могут быть формализованы, если с помощью соотношения (2.20) записать каждое из этих ограничений для большого числа частот в пределах заданного диапазона.

Так, например, из первой системы ограничений вытекают следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) &\leq \varepsilon - B(\omega_m) + \hat{H}(e^{j\omega_m}), \\ -T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) &\leq \varepsilon + B(\omega_m) - \hat{H}(e^{j\omega_m}), \end{aligned} \right\} \omega_m \text{ в п. 1}$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) - T_3 &\leq -B(\omega_m) + \hat{H}(e^{j\omega_m}), \\ -T_1 A_1(\omega_m) - T_2 A_2(\omega_m) - T_3 &\leq B(\omega_m) - \hat{H}(e^{j\omega_m}). \end{aligned} \right\} \omega_m \text{ в п. 2}$$

(2.21)

где  $T_3$  представляет собой максимум ошибки аппроксимации в полосе 2. Полученная система неравенств имеет вид, пригодный для решения методами линейного программирования.

Аналогично для второй системы ограничений можно записать вторую систему неравенств относительно переменных  $T_1, T_2, T_3$ . В общем случае, когда частотная характеристика задается на нескольких участках, разделенных переходными полосами, в которых частотные отсчеты не заданы, можно составить систему линейных неравенств относительно этих неизвестных частотных отсчетов и решить ее методами линейного программирования.

Итак, при расчете фильтров методом частотной выборки используются лишь те коэффициенты ДПФ импульсной характеристики фильтра, которые находятся в интересующих нас полосах, а остальные коэффициенты ДПФ, попадающие в переходные полосы, считаются незадаваемыми. Относительно этих неизвестных коэффициентов составляется система линейных неравенств, описывающая ограничения, накладываемые на частотную характеристику. Решая эту систему методами линейного программирования, получают значения незадаваемых частотных отсчетов.

### Два вида частотных выборок

При расчете фильтров методом частотной выборки возможны следующие два вида разбиения:  $f_k = \frac{k}{N}, k = \overline{0, N-1}$  и  $f_k = \frac{(k+\frac{1}{2})}{N}, k = \overline{0, N-1}$ . Так как  $N$  может быть четным и нечетным, то получим четыре варианта:

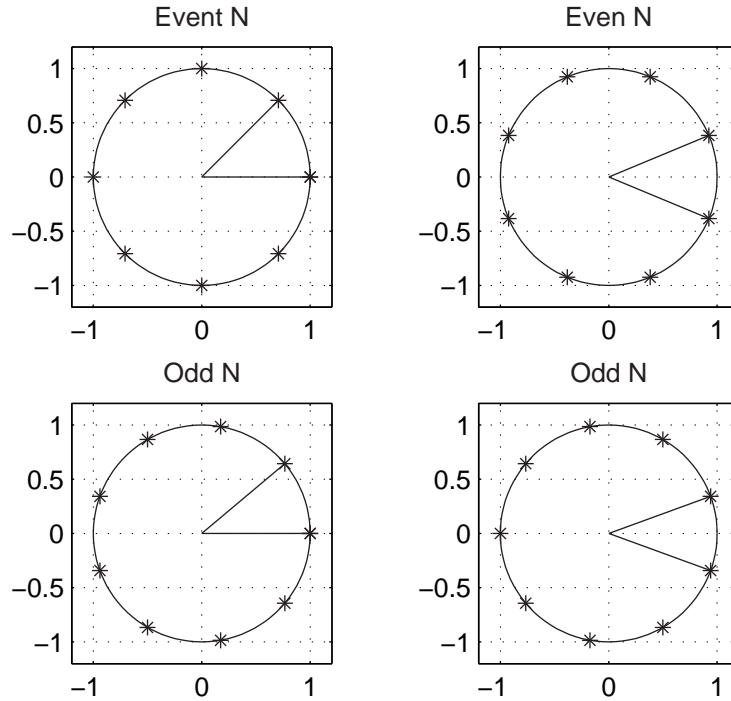


Рис. 6: Варианты частотных выборок.

### Примеры использования фильтров. Спектральный анализ в одной точке $z$ -плоскости

В общем случае задачу спектрального анализа можно рассматривать как задачу вычисления  $z$ -преобразования модифицированного сигнала в некоторой точке на  $z$ -плоскости.

Теоретически спектр можно измерить в любой точке  $z_1$  на  $z$ -плоскости.

$$S_n(z_1) = x(n) + x(n-1)z_1^{-1} + x(n-2)z_1^{-2} + \dots + x(n-N+1)z_1^{-N+1} \quad (2.22)$$

или

$$S_n(z_1) = \sum_{m=n-N+1}^n x(m)z_1^{-(n-m)}, \quad (2.23)$$

где  $N$ -число отсчетов, по которым находится оценка спектра. Во многих приложениях, в частности когда спектр сигнала меняется во времени, приходится измерять  $S_n(z_1)$  для последовательных значений  $n$ , т.е. значения  $S_0(z_1)$ ,  $S_1(z_1)$ ,  $S_1(z_1)$  и т.д.

Такой способ измерений называют скользящим спектральным измерением, оно обеспечивается за счет смещения на один отсчет вперед временного окна (содержащего  $N$  отсчетов) и повторения измерения.

Анализ формул (2.22) и (2.23) показывают, что скользящее спектральное измерение в одной точке  $z = z_1$  эквивалентно фильтрации КИХ-фильтром с импульсной характеристикой вида:

$$h(n) = z_1^{-n}, 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.24)$$

Проанализировав выражения для двух последовательных спектральных измерений  $S_{n-1}(z_1)$  и  $S_n(z_1)$ , можно получить следующее рекуррентную формулу:

$$S_n(z_1) = z_1^{-1}S_{n-1}(z_1) + x(n) - z_1^{-N}x(n - N). \quad (2.25)$$

Отсюда следует, что для обеспечения скользящих спектральных измерений сигнала в одной точке  $z = z_1$  достаточно выполнить всего два комплексных умножения.

### Алгоритм Блестейна

Алгоритм БПФ позволяет существенно уменьшить время вычисления  $N$  - точечного ДПФ лишь при условии, что число  $N$  имеет много сомножителей. Однако существуют и другие эффективные алгоритмы расчета ДПФ последовательностей, также требующие выполнения порядка  $N \log N$  операций. К ним относится и алгоритм Блестейна, применимый при любых  $N$  и основанный на цифровой фильтрации, эквивалентной вычислению ДПФ.

Рассмотрим цифровой фильтр с импульсной характеристикой  $h(n)$  вида:

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ e^{j\frac{\pi n^2}{N}}, & 0 \leq n \leq 2N - 1, \\ 0, & n \geq 2N \end{cases} \quad (2.26)$$

При подаче на его вход  $N$ -точечной последовательности  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , выходная последовательность  $y(n)$  на интервале  $N \leq n \leq 2N - 1$  будет равна

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(n - r), N \leq n \leq 2N - 1 \quad (2.27)$$

пусть  $k = n - N$

$$y(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(k+N-r) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)e^{j(\frac{\pi}{N})(k+N-r)^2}, 0 \leq k \leq N-1, \quad (2.28)$$

откуда

$$y(k) = e^{j\pi(\frac{k^2}{N})} e^{j\pi N} \sum_{r=0}^{N-1} \underbrace{[x(r)e^{j\pi\frac{r^2}{N}}]}_{w(r)} e^{-j(\frac{2\pi}{N})rk}. \quad (2.29)$$

Из формулы (2.29) следует, что выходная последовательность  $y(k)$  равна взвешенным (весовые коэффициенты равны  $e^{j\pi(\frac{k^2}{N})} e^{j\pi N}$ ) отсчетам ДПФ  $N$ -точечной последовательности вида  $x(r)e^{j\pi\frac{r^2}{N}}$ .

Основной смысл алгоритма Блестейна состоит в том, что с его помощью показана возможность получения ДПФ последовательности посредством ее линейной фильтрации.

## Теория и аппроксимация цифровых фильтров с бесконечными импульсными характеристиками

Методы расчета цифровых фильтров с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ-фильтры) применимы при условии, что фильтры являются физически реализуемыми и, конечно, устойчивыми. Для импульсных характеристик таких фильтров  $h(n)$  справедливы следующие ограничения:

$$h(n) = 0, \forall n < 0. \quad (2.30)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (2.31)$$

Наиболее общая форма записи  $z$ -преобразования импульсной характеристики БИХ-фильтров имеет вид:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (2.32)$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов  $a_i$  отличен от нуля, причем сразу все корни знаменателя не могут в точности компенсироваться корнями числителя.

Действительно, рассмотрим, например, фильтр с  $z$ -преобразованием импульсной характеристики

$$H(z) = \frac{(1 - z)^{-8}}{(1 - z)^{-1}}, \quad (2.33)$$

удовлетворяющим общей формуле (2.33). Так как корень  $z = 1$  знаменателя компенсируется корнем  $z = 1$  числителя, то фактически функция  $H(z)$  представляет собой полином от  $z^{-1}$  с конечным числом членов, так что последовательность  $h(n)$  будет соответствовать КИХ-фильтру.

Фильтр с передаточной функцией вида (2.33) имеет, вообще говоря, конечное число нулей ( $M$ ) и полюсов ( $N$ ). Нули  $H(z)$  могут располагаться на всей  $z$ -плоскости, но полюсы  $H(z)$  в соответствии с условиями устойчивости фильтра обязательно должны размещаться внутри круга единичного радиуса.

Будем использовать три основные функции, характеризующие фильтр: квадрат амплитудной характеристики, фазовую характеристику и характеристику групповой задержки.

#### Квадрат амплитудной характеристики

При расчете БИХ-фильтра с использованием аппроксимации только амплитудной характеристики (т.е. без учета фазовой характеристики) удобнее всего оперировать с квадратом амплитудной характеристики.

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.34)$$

#### Фазовая характеристика

Так как передаточная функция БИХ-фильтра в общем случае является комплексной функцией от  $\omega$ , можно рассматривать и амплитудную и фазовую характеристики фильтра:

$$\beta(e^{j\omega}) = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}[H(z)]}{\text{Re}[H(z)]} \right\}_z = e^{j\omega} \quad (2.35)$$

### Характеристика групповой задержки

Характеристика групповой задержки является мерой средней задержки в фильтре как функции частоты и записывается следующим образом:

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} = -jz \frac{d\beta}{dz} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.36)$$

Предпочтительна приблизительно постоянная характеристика групповой задержки во всей полосе (или полосах) пропускания фильтра.

### Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтра

Решение задачи расчета фильтров сводятся к нахождению значений его коэффициентов  $(b_j, a_i)$  в формуле (2.33), обеспечивающих аппроксимацию заданных характеристик фильтра, таких, как импульсная и частотная характеристики, характеристика групповой задержки и др. в том или ином смысле (например, в среднеквадратическом или минимаксном).

В настоящее время существует три основных пути построения БИХ-фильтров. Первый метод предполагает расчет соответствующего фильтра непрерывного времени и его дискретизацию. Этот подход можно использовать при проектировании стандартных фильтров.

Другую группу методов расчета цифровых БИХ-фильтров образуют прямые методы расчета в  $z$ -плоскости. Часто удается найти такое расположение полюсов и нулей, при котором обеспечивается некоторая аппроксимация непосредственно заданных характеристик фильтра.

Третий, также часто встречающийся подход к расчету БИХ-фильтров заключается в использовании процедур оптимизации для нахождения такого расположения полюсов и нулей в  $z$ -плоскости, при котором обеспечивается аппроксимация в том или ином смысле заданной характеристики фильтра.

### Расчет цифровых фильтров по фильтрам непрерывного времени

Хорошо известны такие классы аналоговых фильтров, как фильтры Баттерворта, фильтры Чебышева типа I и II и фильтры Кауэра (эллиптические фильтры).

Предположим, что передаточная функция аналогового фильтра (представляющая собой преобразование Лапласа от импульсной характеристики) равна:



$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^i}{\sum_{i=1}^N a_i s^i} = \frac{\prod_{i=1}^M (s + c_i)}{\prod_{i=1}^N (s + d_i)}, \quad (2.37)$$

причем коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  известны.

Дифференциальное уравнение фильтра имеет вид:

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad (2.38)$$

Наиболее распространенными методами дискретизации аналогового фильтра с передаточной функцией (2.37) являются следующие:

1. метод отображения дифференциалов;
2. метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;
3. метод билинейного преобразования;
4. метод согласованного  $z$ -преобразования;

Один из наиболее простых методов дискретизации аналоговой системы заключается в замене дифференциалов в ее дифференциальном уравнении на конечные разности, что дает возможность получить разностные уравнения.

При этом должны выполняться следующие требования:

1. Ось  $j\Omega$  из  $s$ -плоскости должна отображаться в единичную окружность на  $z$ -плоскости.
2. Точки из левой половины  $s$ -плоскости после отображения должны располагаться внутри единичной окружности в  $z$ -плоскости.

Выполнение первого требования позволяет сохранить селективные свойства аналоговой системы, а выполнение второго гарантирует, что получающаяся в результате отображения устойчивой аналоговой системы дискретная система также является устойчивой.

Можно показать, что для прямых и обратных разностей будут иметь место следующие отображения:

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}, \quad s = \frac{1 - z^{-1}}{T}, \quad z = \frac{1}{1 - sT}, \quad s = j\omega,$$

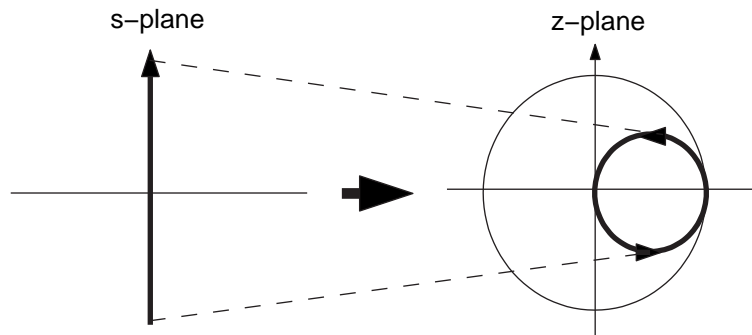


Рис. 7: Обратные разности.

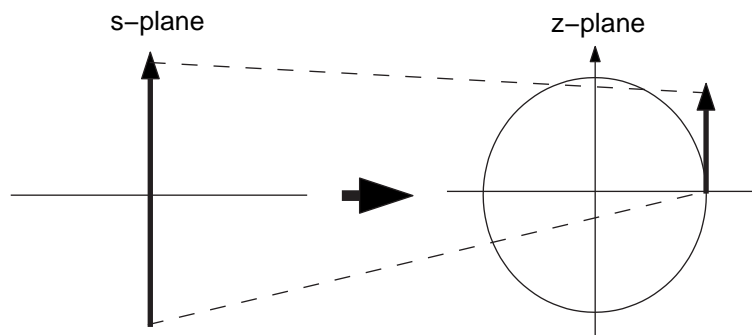


Рис. 8: Прямые разности.

$$\left\{ \operatorname{Re}[z] - \frac{1}{2} \right\}^2 + \{ \operatorname{Im}[z] \}^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.39)$$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y(n+1) - y(n)}{T}, \quad s = \frac{z-1}{T}, \quad z = 1 + st, \quad s = j\Omega, \quad z = 1 + j\Omega T.$$

Таким образом, независимо от того, используются ли простые прямые или простые обратные разности, характеристики аналогового фильтра при этом не сохраняются, поэтому для дискретизации аналоговых фильтров обычно применяются другие методы.

#### Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики

В этом методе в качестве импульсной характеристики рассчитываемого цифрового фильтра используется дискретизованная импульсная характеристика соответствующего аналогового прототипа.

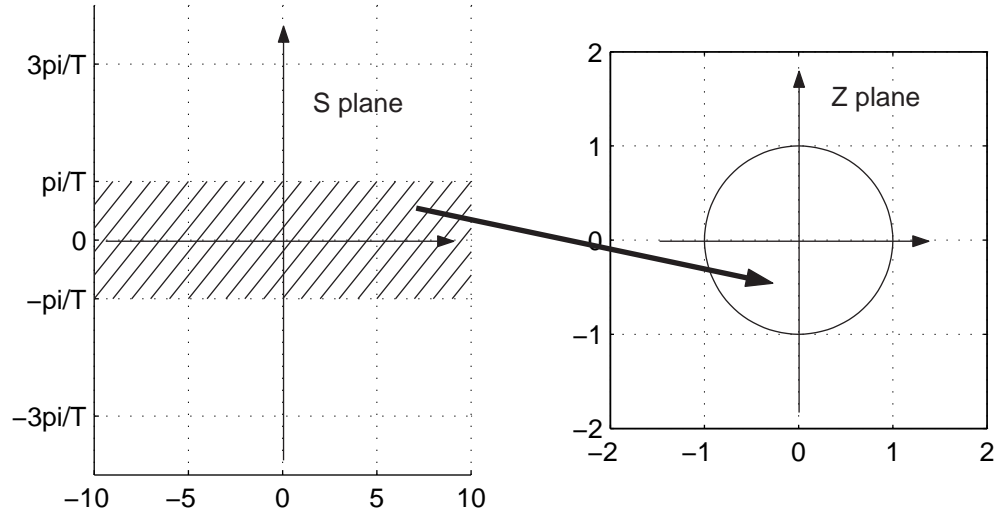


Рис. 9: Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики.

Можно показать, что для простых полюсов переход от  $H(s)$  к  $H(z)$  осуществляется с помощью отображения, при котором используется замена

$$\frac{1}{s + d_i} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-d_i T}}, \quad (2.40)$$

здесь  $T$ -период дискретизации, а частотная характеристика цифрового фильтра, рассчитываемого методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, образуется путем наложений частотной характеристики дискретизируемого аналогового фильтра:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H(j\Omega + jl\Omega_s), \quad (2.41)$$

где  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$  - условие частоты дискретизации цифрового фильтра.

Таким образом, каждая горизонтальная полоса шириной  $2\pi/T$  из  $s$ -плоскости отображается на  $z$ -плоскость. Поэтому все смежные полосы из  $s$ -плоскости будут при отображении накладываться друг на друга в  $z$ -плоскости.

Отсюда следует, что для того чтобы частотные характеристики исходного аналогового фильтра и цифрового фильтра соответствовали друг другу, необходимо чтобы полоса пропускания аналогового фильтра находилась в пределах диапазона  $-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$ . Для выполнения этого условия необходимо до начала преобразования вводить дополнительный фильтр нижних частот, гарантирующий соответствующее ограничение полосы пропускания аналогового фильтра.

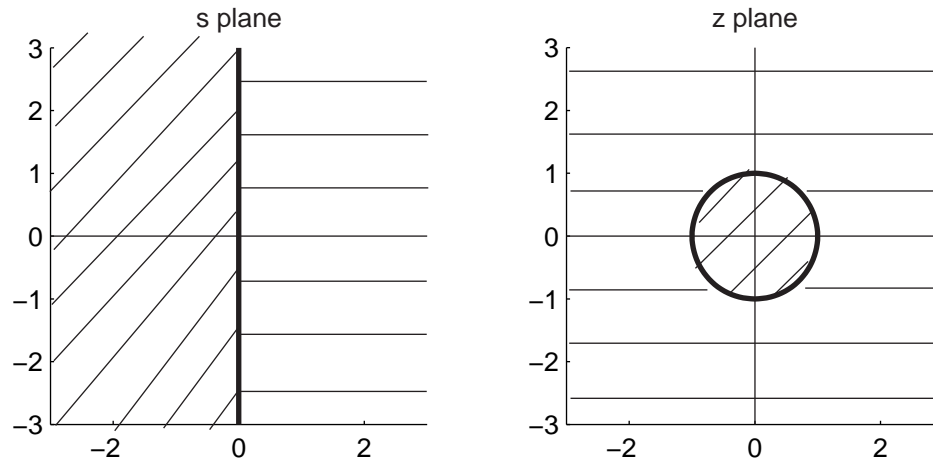


Рис. 10: Метод билинейного преобразования импульсной характеристики.

### Билинейное $z$ -преобразование

Существует простое отображение из  $s$ -плоскости в  $z$ -плоскость, свободное от перечисленных недостатков и в тоже время сохраняющее удобную алгебраическую форму. Оно называется билинейным преобразованием, использующим следующую замену:

$$s \rightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}, \quad (2.42)$$

или

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}, \quad z = \frac{\frac{2}{T} + j\Omega}{\frac{2}{T} - j\Omega} \quad (2.43)$$

Таким образом, вся ось  $j\Omega$  из  $s$ -плоскости отображается в единичную окружность на  $z$ -плоскости; левая полуплоскость  $s$ -плоскости отображается в единичный круг, а правая полуплоскость  $s$ -плоскости - в область расположенную вне единичного круга на  $z$ -плоскости.

Так как в единичную окружность на  $z$ -плоскости отображается вся ось  $j\Omega$  из  $s$ -плоскости, то эффекты связанные с наложениями в частотной характеристике цифрового фильтра, характерные для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, в данном случае будут отсутствовать.

Однако соотношение между частотами аналогового фильтра  $\Omega$  и цифрового фильтра  $\omega$  оказывается существенно нелинейным.

$$\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (2.44)$$

По этой причине, например, билинейное преобразование нельзя использовать для преобразования аналогового дифференцирующего фильтра в цифровой дифференциатор. Существует, правда, довольно большой класс фильтров, для которых частотная деформация, описываемая (2.44) может быть скомпенсирована. К ним относятся фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные фильтры.

### Согласованное $z$ -преобразование

Четвертый метод дискретизации аналоговых фильтров основан на непосредственном отображении полюсов и нулей из  $s$  и нули на  $z$ -плоскости. При таком отображении полюс (или нуль) в точке  $s = -a$  плоскости  $s$  отображается в полюс (или нуль) в точке  $z = e^{-aT}$  плоскости  $z$ , где  $T$ -период дискретизации:

$$s + a \rightarrow 1 - z^{-1}e^{-aT} \quad (2.45)$$

Если полюсы (или нули) комплексные, то (2.45) можно переписать следующим образом:

$$(s + a - jb)(s + a + jb) = (s + a)^2 + b^2 \rightarrow 1 - 2z^{-1}e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT} \quad (2.46)$$

Полюсы цифрового фильтра, рассчитываемого методом согласованного  $z$ -преобразования, аналогового фильтра оказываются идентичными полюсам, получаемым при инвариантном преобразовании импульсной характеристики того же аналогового фильтра, однако нули существенно различаются.

Вообще использование инвариантного преобразования импульсной характеристики или билинейного преобразования предпочтительнее использования согласованного  $z$ -преобразования.

### Методы расчета аналоговых фильтров нижних частот

Пусть требуется рассчитать нормированный фильтр нижних частот с частотой среза  $\Omega = 1$  рад/с.

### Фильтры Баттерворта

Фильтры Баттерворта нижних частот характеризуются тем, что имеют максимально гладкую амплитудную характеристику в начале координат  $s$ -плоскости.

Квадрат амплитудной характеристики нормированного (т.е. частота среза  $\Omega_c = 1$  рад/с) фильтра Баттерворта равен:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega^2)^n}, \quad (2.47)$$

где  $n$ -порядок фильтра. Аналитически продолжая функцию (2.47) на всю  $s$ -плоскость, получим:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (2.48)$$

Все полюсы формулы (2.48) находятся на единичной окружности на одинаковом расстоянии друг от друга в  $s$ -плоскости. Выразим передаточную функцию  $H(s)$  через полюсы, располагающиеся в левой полуплоскости  $s$ :

$$H(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad s_k = e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{(2k-1)}{2n}]}, \quad k = 1, n \quad (2.49)$$

$K_0$ -константа нормирования.

На практике порядок фильтра Баттерворта обычно рассчитывают исходя из условия обеспечения определенного ослабления на некоторой заданной частоте  $\Omega_t > 1$ . Порядок фильтра, обеспечивающий на частоте  $\Omega = \Omega_t$  уровень амплитудной характеристики, равный  $\frac{1}{A}$ , можно найти из соотношения:

$$n = \frac{\lg(A^2 - 1)}{2 \lg(\Omega_t)} \quad (2.50)$$

### Фильтры Бесселя

Фильтры Бесселя характеризуются максимально гладкой характеристикой групповой задержки в начале координат в  $s$ -плоскости. Передаточная функция фильтров Бесселя записывается в виде:

$$H(s) = \frac{d_0}{B_n(s)} \quad (2.51)$$

где  $B_n(s)$  - функция Бесселя  $n$ -го порядка, а  $d_0$  - константа нормирования, равная

$$d_0 = \frac{2n!}{2^n n!} \quad (2.52)$$

Функции Бесселя удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$B_n(s) = (2n - 1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad (2.53)$$

С начальными условиями  $B_0(s) = 1$  и  $B_1(s) = s+1$ . Эти функции можно также представить в виде:

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n d_k s^k \quad (2.54)$$

где

$$d_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-k} k! (n - k)!} \quad (2.55)$$

Можно показать, что фильтры Бесселя имеют только полюсы, которые расположены на окружности с центром на действительной положительной полуоси. В отличие от фильтров Баттерворта

частота среза фильтров Бесселя  $\Omega_c$  зависит от их порядка, что затрудняет работу с ними. Частоту среза фильтра Бесселя  $n$ -го порядка можно найти, анализируя поведение его амплитудно-частотной характеристики на высоких частотах

$$\Omega_c = d_0^{1/n} \quad (2.56)$$

### Фильтры Чебышева

Отличительной чертой фильтров Чебышева является наименьшая величина максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации - в полосе пропускания или в полосе непропускания, различают фильтры Чебышева

типа I и II. Квадрат амплитудной характеристики фильтра Чебышева типа I  $n$ -го порядка описывается выражением:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \quad (2.57)$$

где  $T_n(\Omega)$ -полином Чебышева  $n$ -го порядка, по определению равный:

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\Omega)), & |\Omega| \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(\Omega)), & |\Omega| > 1 \end{cases}, \quad (2.58)$$

а  $\varepsilon$  - параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания.

Свойство оптимальности фильтров Чебышева типа I порядка  $n$  заключается в том, что не существует какого-либо другого фильтра  $n$ -го порядка, содержащего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики и в полосе пропускания и в полосе непропускания.

Фильтры Чебышева типа II (иногда их называют также обратными фильтрами Чебышева) обеспечивают монотонное изменение ослабления в полосе пропускания и равновеликие пульсации в полосе непропускания. Нули фильтров этого типа располагаются на мнимой оси в  $s$ -плоскости, а полюсы - в левой полуплоскости.

Квадрат амплитудной характеристики:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[ \frac{T_n(\Omega_r)}{T_n(\Omega_r/\Omega)} \right]^2}, \quad (2.59)$$

где  $\Omega_r$  - наименьшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданный уровень ослабления.

Рассмотрим функцию квадрата амплитудной характеристики для фильтров Чебышева типов I и II при четных и нечетных  $n$ . Во всех этих фильтрах граница полосы пропускания находится при  $\Omega = 1$ , где  $|H(1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ , а граница полосы непропускания расположена при  $\Omega = \Omega_r$ , где  $|H(\Omega_r)|^2 = \frac{1}{A^2}$ .

Фильтры Чебышева типа I имеют простые полюсы в точках  $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ , где  $k=1, n$ , которые лежат в  $s$ -плоскости на эллипсе, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2 \phi} + \frac{\Omega_k^2}{\operatorname{ch}^2 \phi} = 1, \quad (2.60)$$



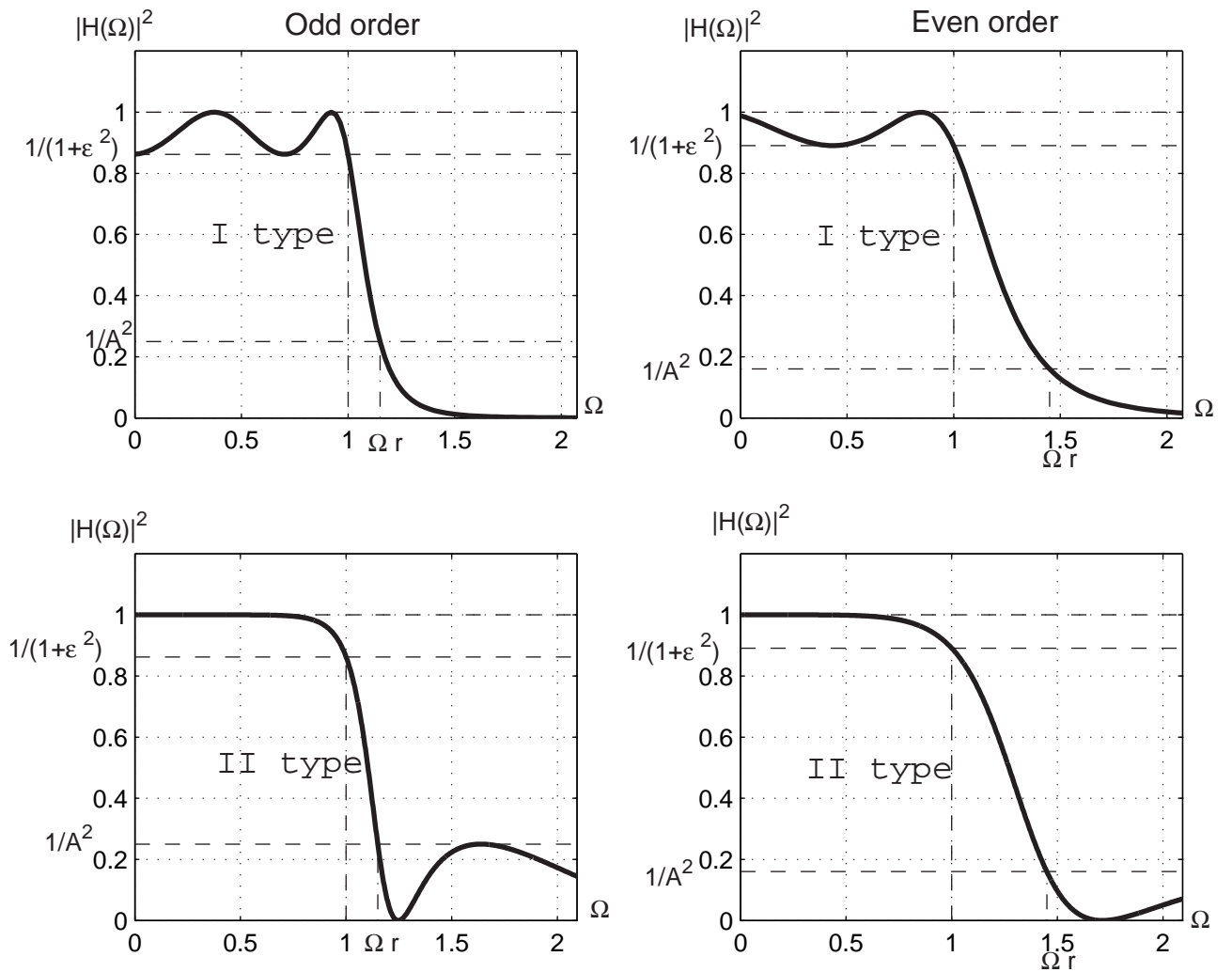


Рис. 11: Общий вид функции квадрата амплитудной характеристики аналоговых фильтров Чебышева нижних частот типа I и II.

где

$$\sigma_k = -\operatorname{sh} \phi \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \Omega_k = \operatorname{ch} \phi \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \quad (2.61)$$

$$\operatorname{sh} \phi = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \operatorname{ch} \phi = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad (2.62)$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^{1/n} \quad (2.63)$$

Фильтры Чебышева типа II имеют и полюсы и нули. Нули являются чисто мнимыми и находятся в точках:

$$s_k = j \frac{\Omega_r}{\cos\left\{\left[\frac{(2k-1)}{2n}\right]\pi\right\}}, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.64)$$

При нечетных  $n$  нуль с номером  $k = (n+1)/2$  находится на бесконечности. Полюсы фильтров типа II можно найти, вычислив координаты особых точек знаменателя передаточной функции (2.59).

$$\sigma_k = \frac{\Omega_r \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \quad (2.65)$$

$$\Omega_k = \frac{-\Omega_r \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

где

$$\alpha_k = -\operatorname{sh} \phi \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad (2.66)$$

$$\beta_k = \operatorname{ch} \phi \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),$$

причем

$$\operatorname{sh} \phi = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad (2.67)$$

$$\operatorname{ch} \phi = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2},$$

и

$$\gamma = \left( A + \sqrt{A^2 - 1} \right)^{1/n}. \quad (2.68)$$

Фильтры Чебышева типа I и II полностью определяются любыми тремя из следующих четырех параметров:

1.  $n$  (порядок фильтра);
2.  $\varepsilon$  (параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания);
3.  $\Omega_r$  (наинизшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданное ослабление);
4.  $A$  (параметр, характеризующий ослабление в полосе непропускания).

Порядок фильтра, необходимый для обеспечения заданных значений  $\varepsilon$ ,  $A$  и  $\Omega_r$ , определяется с помощью формулы:

$$n = \frac{\log(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\log(\Omega_r) + \sqrt{\Omega_r^2 - 1}}, \quad (2.69)$$

где

$$g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon}} \quad (2.70)$$

### Эллиптические фильтры

Эллиптические фильтры характеризуются тем, что их амплитудная характеристика имеет равновеликие пульсации и в полосе пропускания и в полосе непропускания. Можно показать, что с точки зрения минимальной ширины переходной полосы эллиптические фильтры являются оптимальными.

Квадрат амплитудной характеристики эллиптического фильтра нижних частот записывается в виде:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\Omega, L)}, \quad (2.71)$$

где  $R_n(\Omega, L)$ -рациональная функция Чебышева, а  $L$ -параметр, характеризующий пульсации функции  $R_n(\Omega, L)$ .

В полосе пропускания  $-1 \leq \Omega \leq 1$  эта функция осциллирует между нулем и единицей, начиная с частоты  $\Omega_l$ , она осциллирует между  $L^2$  и  $\infty$ . При изменении параметра  $L$  величина  $\Omega_l$  тоже будет меняться. Фактически можно выбрать любые три из четырех параметров фильтра (порядок, ослабление в полосе пропускания, ослабление в полосе непропускания и переходное отношение, или, что тоже самое, частота среза  $\Omega_l$ ), и четвертый из них определяется однозначно.

## Список источников

### Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.- М.: "Мир", 1978. (есть в библиотеке МГАПИ)
2. Оппенгейм А.В. Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. - М.: Мир, 1976 (есть в ЦПБ)
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин В.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов.- М.: "Радио и связь", 1990. (есть в библиотеке МГАПИ, есть в отсканированном виде, обращайтесь ко мне лично)
4. Б.И. Шахтарин Случайные процессы в радиотехнике. -М.: Радио и Связь, 2000. (очень хорошая книга по цифровой обработке радиосигналов, в том числе по оптимальной (фильтр Винера, Калмана) и адаптивной фильтрации).
5. Steven W. Smith The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, [www.DSPguide.com](http://www.DSPguide.com), California Technical Publishing, San Diego, California (прекрасная книга для начинающих, есть скачанный вариант, обращайтесь)
6. <http://www.student.oulu.fi/oniemita/DSP/DSPSTUFF.TXT> - прекрасно написанное, легко читаемое пособие для начинающих.

### Список ресурсов интернета

- <http://www.vocord.ru> - производитель устройств компьютерной телефонии
- <http://www.analog.com> - Официальный сайт Analog Devices
- <http://www.ti.com> - Официальный сайт Texas Instruments
- <http://www.scanti.ru/> - Сайт официального представителя Texas Instrument в России
- <http://www.motorola.com> - Официальный сайт Motorola
- <http://www.bdti.com/faq/2.htm>

- <http://www-ccrma.stanford.edu/jos/filters/>
- <http://www.smartelectronix.com/musicdsp/archive.php>
- <http://www.mesi.net/> - производители программного обеспечения для модемов
- <http://www.gaoresearch.com> - производители программного обеспечения для модемов
- <http://www.dspg.com/website/index.html>
- <http://www.dspguru.com/>
- <http://www.epabion.com/java/splane>
- <http://personal.lig.bellsouth.net/lig/y/a/yatesc>
- <http://www.pentek.com>
- [http://vissim.nm.ru/sd\\_adc.html](http://vissim.nm.ru/sd_adc.html)
- <http://www.spa.com.au>
- <http://www.spiritcorp.com> - Сайт Российской компании Spirit (Сжатие речи, GPS Navstar и т.п.)
- <http://www.module.ru> - Российский производитель DSP (собственные разработки, архитектура DSP следующих поколений, нейро-DSP)
- <http://www.nateks.ru> - производитель телекоммуникационного оборудования
- <http://www.google.com> - группа новостей 'comp.dsp'

Для заметок

Подписано к печати 15.04.2002г. Формат 60x84. 1/16.  
Объем 4 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 60.  
Московская Государственная Академия Приборостроения и информатики.