Реализация демодулятора FSK

Демодулятор FSK может быть реализован различными способами, наиболее простой из которых основан на автокорреляционном методе.

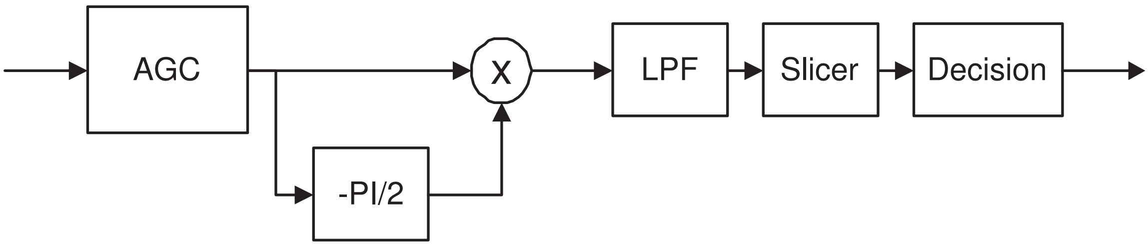

Рис. 1: процесс демодуляции FSK.

Пусть входной сигнал демодулятора представляется в виде

$$R(t) = \cos((\omega_c \pm \delta\omega)t + \phi) \tag{1}$$

Умножим принятый сигнал на его задержанную версию

$$R(t-\tau) = \cos((\omega_c \pm \delta\omega)(t-\tau) + \phi), \tag{2}$$

где τ - задержка.

$$\begin{aligned} &2\cos\left[(\omega_c \pm \delta\omega) * t + \phi\right]\cos\left[(\omega_c \pm \delta\omega)(t-\tau)\right] \\ &= \cos\left[2(\omega_c \pm \delta\omega) * t - (\omega_c \pm \delta\omega) * \tau + 2\phi\right] + \cos\left[(\omega_c \pm \delta\omega) * \tau\right] \\ &= \cos(2\omega_c t - \omega_c\tau \pm \delta\omega\tau + 2\phi) + \cos(\omega_c * \tau \pm \delta\omega\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

Если принять $\omega_c\tau = \pi/2$ и пропустить результат через фильтр нижних частот для удаления $\cos(2\omega_c t - \omega_c\tau \pm \delta\omega\tau + 2\phi)$, то получим сигнал

$$\cos(\pi/2 \pm \delta\omega\tau) = \sin(\pm\delta\omega\tau) = \pm\sin(\delta\omega) \tag{4}$$

Таким образом, в зависимости от частоты входного сигнала $\omega_c + \delta\omega$ или $\omega_c - \delta\omega$ на выходе фильтра нижних частот будет формироваться положительный или отрицательный отклик. Если необходимо обеспечить фазовую задержку $\omega_c\tau = \pi/2$, то время задержки в секундах будет равно

$$\tau = \frac{\pi/2}{\omega_c} = \frac{\pi/2}{2 * \pi f_c} = \frac{1}{4f_c} \tag{5}$$

Времена задержек для стандартов V.21 и Bell 103 при частоте дискретизации 8KHz приведены в таблице

Название стандарта	Частота (Hz)	$\tau(\mu s)$	# 8KHz отсчетов
V.21 Originate	1080	231.481	1.8518
V.21 Answer	1750	142.857	1.1428
Bell 103 Originate	1170	213.675	1.7094
Bell 103 Answer	2125	117.647	0.9412

Как видно из приведенной таблицы ни одно из времен задержки не представимо в виде целого количества интервалов дискретизации. Для уменьшения вероятности ошибочной демодуляции фазовая задержка должна быть как можно ближе к $\pi/2$. С этой целью можно использовать простой фильтр с конечной импульсной характеристикой.

Синтез задерживающего фильтра по заданной характеристике групповой задержки

Для обеспечения задержки на дробное количество отсчетов используется фильтр следующего вида.

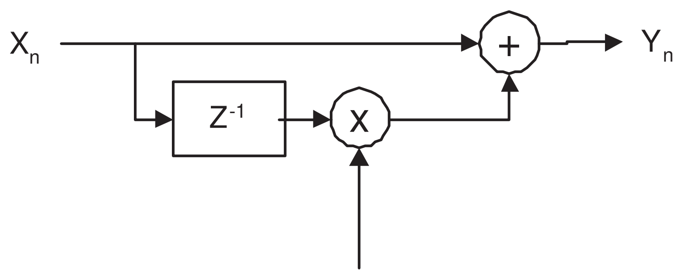

Рис. 2: Структура фильтра

Выход фильтра $Y(n)$ можно представить следующим образом

$$y(n) = x(n) + \beta x(n-1) \tag{6}$$

Применяя z-преобразование к обеим частям равенства, получаем

$$\begin{aligned} &Y(z) = X(z) + \beta z^{-1} X(z) \\ &= X(z)(1 + \beta z^{-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

Передаточная функция фильтра:

$$F(z) = Y(z)/X(z) = (1 + \beta z^{-1}) \tag{8}$$

Задача фильтрации сводится к обеспечению заданной групповой задержки τ (задержки огибающей сигнала), которая определяется как:

$$\tau = \frac{-d\phi(\omega)}{d\omega} \triangleq \text{групповая задержка} \tag{9}$$

где $\phi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega}))$ - фазовая характеристика фильтра. Определим частотную характеристику

$$F_\omega(\omega) = F(e^{j\omega}) = 1 + \beta e^{-j\omega} \tag{10}$$

$$F_\omega(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \tag{11}$$

где $R(\omega)$, $I(\omega)$, $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$ действительные функции переменной ω

$$A(\omega) = |F_\omega| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{12}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) \tag{13}$$

Представим аргумент передаточной функции в алгебраическом виде

$$e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\sin(\omega) \tag{14}$$

и подставим в выражение (10):

$$F_\omega(\omega) = 1 + \beta\cos(\omega) - j\beta\sin(\omega) \tag{15}$$

Пользуясь (11), (13), (15), получим

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\beta\sin(\omega)}{1 + \beta\cos(\omega)}\right) \tag{16}$$

Подставляя (16) в (9), получаем

$$\frac{-d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{-d}{d\omega}\left(\arctan\left(\frac{-\beta\sin(\omega)}{1 + \beta\cos(\omega)}\right)\right) \tag{17}$$

Используя соотношение

$$\frac{d}{dx}\arctan(u) = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}, \tag{18}$$

получим

$$\tau = \frac{-1}{1+\left(\frac{-\beta\sin(\omega)}{1+\beta\cos(\omega)}\right)^2} \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{-\beta\sin(\omega)}{1+\beta\cos(\omega)}\right) \tag{19}$$

$$= \left(\frac{-(1+\beta\cos(\omega))^2}{1+\beta^2+2\beta\cos(\omega)}\right)\cdot\left(\frac{-\beta\cos(\omega)-\beta}{(1+\beta\cos(\omega))^2}\right) \tag{20}$$

$$= \frac{\beta(\beta+\cos(\omega))}{1+\beta^2+2\beta\cos(\omega)} \tag{21}$$

Если измерять задержку в интервалах дискретизации $D = \dfrac{\tau}{T}$ (T-период дискретизации), то ω будет измеряться в радианах: $\omega = \dfrac{f_s}{f_d}2\pi$. Решая уравнение (21) относительно β, получаем:

$$\beta = -\frac{(1-2D)\cos(\omega) \pm \sqrt{(1-2D)^2 cos^2(\omega) + 4D(1-D)}}{2(1-D)} \tag{22}$$

Синтез задерживающего фильтра по заданной фазовой характеристике

Приведенный выше метод расчета ориентирован на синтез фильтра с заданной групповой задержкой. На практике иногда удобнее рассчитывать фильтр по известному фазовому отклику. Пусть необходимо реализовать задерживающий фильтр для канала v.21/ch2 (1750Гц). При частоте дискретизации 8000Гц задержка на $\pi/2$ рад соответствует 1.1428 отсчетам сигнала. Уравнение фильтра для этого случая

$$y(n) = h(0)*x(n) + h(1)*x(n-1) + h(2)*x(n-2) \tag{23}$$

Здесь $h(n)$ - импульсная характеристика задерживающего фильтра. Частотную характеристику можно представить в виде

$$\begin{aligned} &H(e^{j\omega}) = h(0)e^0 + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} \\ &= h(0) + h(1)(cos(\omega) - j\sin(\omega)) + h(2)(cos(2\omega) - j\sin(2\omega)) \\ &= h(0) + h(1)cos(\omega) + h(2)cos(2\omega) - j(h(1)\sin(\omega) + h(2)\sin(2\omega)) \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\omega = 2\pi\frac{1750}{8000}$. Так как желаемая задержка соответствует положению во времени между $x(n-1)$ и $x(n-2)$, то $h(0)$ можно не учитывать ($h(0) =$

0). Для задержки на $\pi/2$ действительная часть частотной характеристики фильтра должна быть равна нулю.

$$Re[H(e^{j\omega})] = h(1)cos(\omega) + h(2)cos(2\omega) = 0 \tag{25}$$

Отсюда

$$h(1)cos(\omega) = -h(2)cos(2\omega) \tag{26}$$

Если $h(1)$ принять равным единице, то

$$h(2) = -\frac{cos(\omega)}{cos(2\omega)} = -\frac{\cos\left(2\pi\frac{1750}{8000}\right)}{\cos\left(4\pi\frac{1750}{8000}\right)} = 0.2112 \tag{27}$$

Построим графики фазового и частотного отклика полученного фильтра в пределах от 0 до 4Кгц по 128 точкам.

```
h = [0 1 0.2112] ;
w=0:pi/128:pi;
freqr = h(1)+h(2)*exp(-j*w)+h(3)*exp(-j*2*w) ;
plot(0:4000/128:4000,angle(freqr),'b-'); hold on ;
plot(0:4000/128:4000,abs(freqr),'g-');
```

И отобразим точки с ординатами $pi/2$ на фазовой характеристике и 1 на амплитудной характеристике, соответствующие частоте 1750Гц.

```
freq_point = 1750/8000*2*pi ;
freq_resps = h(1) + h(2)*exp(-j*freq_point)
    + h(3)*exp(-j*2*freq_point) ;
% target
plot([1750],[-pi/2],'r^') ;
plot([1750], 1,'r^') ;
% real
plot([1750], angle(freq_resps),'m+');
plot([1750], abs(freq_resps),'m+');
grid on ;
norm_k = abs(freq_resps)
```

Из графика фазовой характеристики (на рисунке (4) снизу) видно, что фазовая характеристика полностью удовлетворяет исходным данным, но амплитудная характеристика немного завышена. На частоте 1750Гц амплитудная характеристика системы равна

$$\sqrt{(h(1)\cos(\omega) + h(2)\cos(2\omega))^2 + (h(1)\sin(\omega) + h(2)\sin(2\omega))^2} \\ = 1.0616 \tag{28}$$

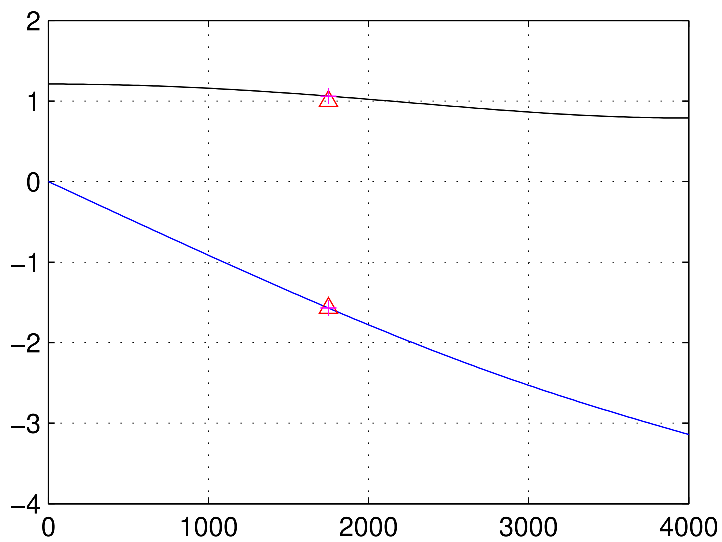

Рис. 3: Фазовый и частотный отклик задерживающего фильтра

Нормируем коэффициенты фильтра, получаем новый вектор импульсной характеристики

$$h = (0, 1, 0.2112)/1.0616 = (0, 0.9420, 0.1989) \tag{29}$$

Вновь построим графики частотного и фазового отклика фильтра, используя новые коэффициенты (Рис. 4). Видно, что обе характеристики удовлетворяют исходным данным для проектирования фильтра.

Алгоритм работы умножителя

При поступлении каждого нового n-го отсчета $\cos[(\omega_c \pm \delta\omega) * nT + \phi]$ умножитель вычисляет новое значение и передает его на вход фильтра нижних частот. Для канала с модуляцией v.21 originate (ch0) алгоритм работы умножителя выглядит так:

$pdel_2 := pdel_1$
$pdel_1 := pdel_0$
$pdel_0 := \cos[(\omega_c \pm \delta\omega) * nT + \phi]$
$pdel_{1.8} := pdel_1 + 4.4355 \cdot pdel_2$
Для канала с модуляцией v.21 answer (ch0):
$pdel_2 := pdel_1$
$pdel_1 := pdel_0$

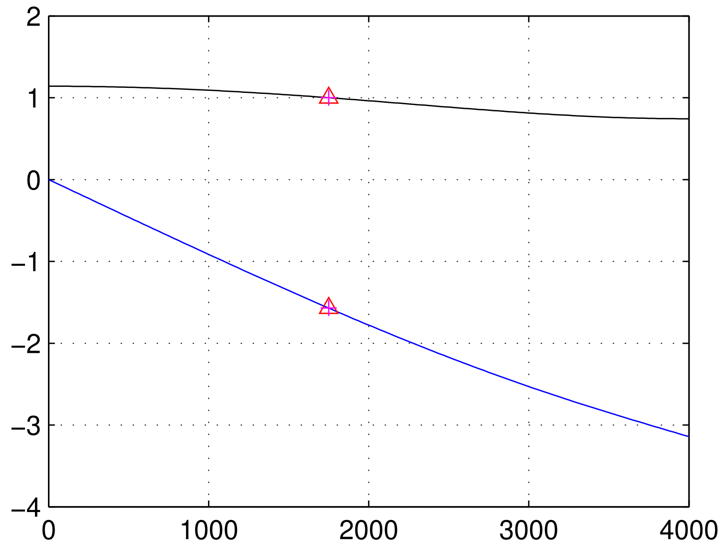

Рис. 4: Фазовый и частотный отклик задерживающего фильтра

$$pdel_0 := \cos[(\omega_c \pm \delta\omega) * nT + \phi]$$
$$pdel_{1.8} := pdel_1 + 0.33487519 \cdot pdel_2$$