Пусть перед нами стоит задача дискретизации аналогового сигнала $f(t)$ и T - период дискретизации. Тогда дискретный сигнал можно формально представить в виде $x(k) = f(T \cdot k)$. Преобразование Фурье этого сигнала

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(T \cdot k) e^{-j\omega T \cdot k} d(T \cdot k) \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию $e^{-j\omega T \cdot k}$. Очевидно, что $\forall k \ e^{-j\omega T \cdot k} = e^{-j(\omega T + 2\pi \cdot n) \cdot k}$, т.е. $e^{-j\omega T \cdot k}$ периодична по ω с периодом: $\omega T = 2\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$. Т.к. ω не связана с переменной интегрирования, то спектр дискретного сигнала $X(\omega)$ периодичен по ω с периодом $\frac{2\pi}{T}$.

замечание. Периодичность спектра возникает из-за того что в дискретных точках синусоида с частотой ω точно совпадает с синусоидами $\omega + 2\pi \cdot k$. Рассмотрим в качестве примера две синусоиды: $y(t) = sin(t)$ и $y_2(t) = sin((1 + 2\pi)t)$ на интервале от 0 до 5 секунд (см. рис 1). Если ввести шаг дискретизации равным 1 секунде, то обе синусоиды будут представлены идентично.

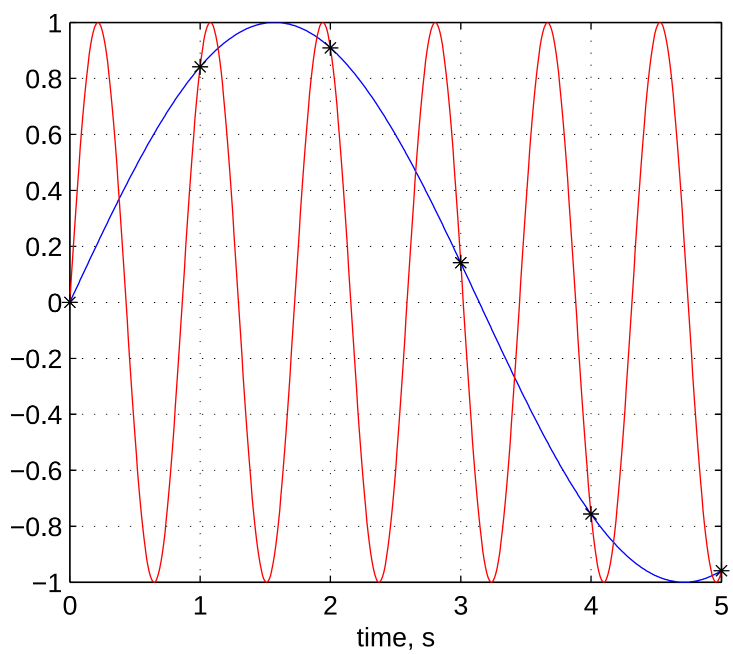

Рис. 1: Совпадение двух синусоид в точках, отстоящих на 1с

С другой стороны $e^{-j\omega T \cdot k} = \cos(\omega T \cdot k) - j \sin \omega T \cdot k$, т.е. $e^{-j\omega T \cdot k}$ комплексно сопряжена с $e^{-j(\omega T + \pi) \cdot k}$ или что тоже самое точки $\omega_k = \frac{\pi}{T} k$ являются границами симметрии сопряженных частей спектра дискретного сигнала.

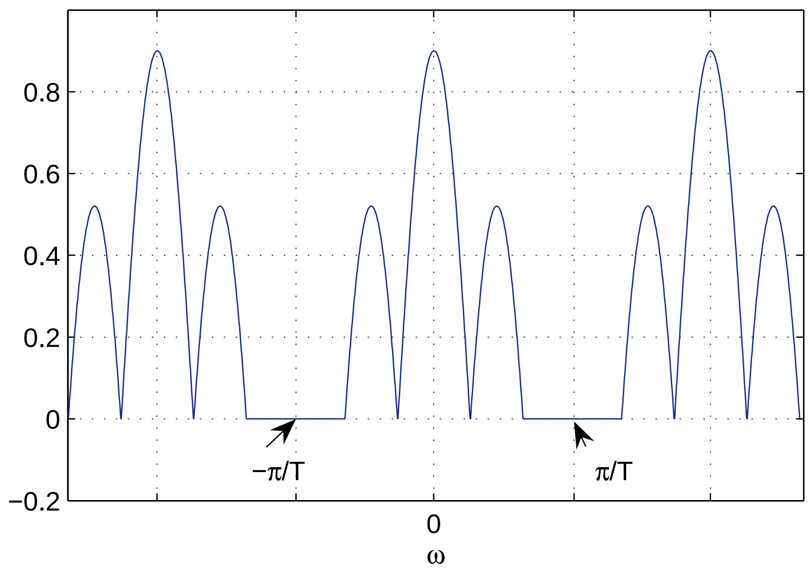

Рис. 2: Спектр дискретного сигнала